Matrice et déterminant

I. Calcul matriciel

1°) Matrices rectangle

Déf : On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Déf : On note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $M_{n,p}(\mathbb{K})$. La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ est une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

Déf : Pour $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{j,k})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on pose $AB=(c_{i,k})\in M_{n,q}(\mathbb{K})$ avec $c_{i,k}=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}$.

Déf : Pour $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose ${}^tA=(a'_{j,i})\in M_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $a'_{j,i}=a_{i,j}$.

Prop : Pour $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$: ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.

2°) Matrice carrées

Déf : On note $M_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n.

Prop : Les matrices commutant avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ sont les λI_n avec $\lambda\in\mathbb{K}$.

Prop : Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux distinctes.
Seules les matrices diagonales commutent avec D.

3°) Matrices inversibles

Déf : On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

Pour $A\in M_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) $\exists B\in M_n(\mathbb{K}), AB=I_n$,

(iii) $\exists C\in M_n(\mathbb{K}), CA=I_n$.

De plus si tel est le cas $B=C=A^{-1}$.

4°) Calcul par blocs

Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B\in M_{n,q}(\mathbb{K})$, $C\in M_{m,p}(\mathbb{K})$ et $D\in M_{m,q}(\mathbb{K})$.

Déf : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B\in M_{n,q}(\mathbb{K})$, $C\in M_{m,p}(\mathbb{K})$ et $D\in M_{m,q}(\mathbb{K})$. On note :

$$\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,q}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,q}\\ \hline c_{1,1} & \cdots & c_{1,p} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,q}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,p} & d_{m,1} & \cdots & d_{m,q}\end{array}\right)\in M_{n+m,p+q}(\mathbb{K}).$$

Théorème :

Sous réserve de compatibilité des types matriciels :

Si $M=\left(\begin{array}{c|c}A & B\\ \hline C & D\end{array}\right)$ et $M'=\left(\begin{array}{c|c}A' & B'\\ \hline C' & D'\end{array}\right)$ alors $MM'=\left(\begin{array}{c|c}AA'+BC' & AB'+BD'\\ \hline CA'+DC' & CB'+DD'\end{array}\right)$.

5°) Noyau, image et rang d'une matrice

Pour $A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $\varphi_A : M_{p,1}(\mathbb{K})\mapsto M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_A(X)=AX$ est linéaire.

Déf : L'image et le noyau de φ_A sont appelée image et noyau de la matrice A. Ces espaces sont notés $\mathrm{Im}\,A$ et $\ker A$. Ainsi $\mathrm{Im}\,A=\{AX / X\in M_{p,1}(\mathbb{K})\}$ et $\ker A=\{X\in M_{p,1}(\mathbb{K}) / AX=0\}$.

Prop : Si $C_1,\dots,C_p$ désignent les colonnes de A alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)$.

Déf : On appelle rang de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la dimension de son image. C'est aussi le rang de la famille de ses colonnes.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leq \min(n,p)$.

$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$.

$\forall U \in GL_n(\mathbb{K})$, $\forall V \in GL_p(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(UA) = \operatorname{rg}(AV) = \operatorname{rg}(A)$.

Théorème :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible,

(ii) $\ker A = \{0\}$,

(iii) $\operatorname{rg} A = n$,

(iv) $\operatorname{Im} A = M_{n,1}(\mathbb{K})$.

II. Représentations matricielles

1°) Matrice des composantes d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$.

Déf : Pour $x \in E$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème :

L'application $x \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E vers $M_{n,1}(\mathbb{K})$

Déf : Pour $x_1,\dots,x_p \in E$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs $x_1,\dots,x_p$ dans la base $\mathcal{B}$.

2°) Matrice d'une application linéaire

Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de bases $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$, $\mathcal{C} = (f_1,\dots,f_n)$.

Déf : Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice formée des composantes dans $\mathcal{C}$ des vecteurs $u(e_1),\dots,u(e_p)$.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_p(\mathbb{K})$ au lieu de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$.

Théorème :

L'application $\mathcal{L}(E,F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'application $\mathcal{L}(E) \to M_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

3°) Formules de changement de bases

Déf : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\operatorname{Id}_E)$.

Prop : P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Théorème :

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$

Pour tout $x \in E$, en notant $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ on a $X' = PX$

Théorème :

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'$.

Soit $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F et $Q = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}'} \mathcal{C}$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, en notant $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$ on a $A' = Q^{-1}AP$.

Cor : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$, $A' = P^{-1}AP$.

4°) Matrices équivalentes

Déf : Deux matrices $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes ssi il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $B = Q^{-1}AV$. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème :

Toute matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ où $r = \operatorname{rg} A$.

Ainsi deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Cor : Les matrices équivalentes sont celles de même rang.

5°) Matrices semblables

Déf : Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables ssi il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Prop : Deux matrices semblables ont même rang. La réciproque est fausse.

6°) Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

Déf : On appelle trace d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ le scalaire $\operatorname{tr} A = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n}$.

Prop : La trace définit une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Soit E une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les représentations matricielles de f sont semblables entre elles, elles auront donc même trace.

Déf : Cette valeur commune est appelée trace de l'endomorphisme f et est notée $\operatorname{tr}(f)$.

Prop : L'application $\operatorname{tr} : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur E.

Prop : $\forall f, g \in \mathcal{L}(E), \operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$.

III. Algorithme du pivot de Gauss

1°) Opérations élémentaires

a) dilatation

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On pose $D_i(\lambda) = \operatorname{diag}(1, \ldots, \lambda, \ldots 1) \in M_n(\mathbb{K})$. C'est une matrice inversible.

Théorème :

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $D_i(\lambda)A$ est obtenue par $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice $AD_i(\lambda)$ est obtenue par $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

b) transvection

Soit $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \in M_n(\mathbb{K})$. C'est une matrice inversible.

Théorème :

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue par $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ est obtenue par $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

c) permutation

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On pose $P(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in M_n(\mathbb{K})$.

Prop : $P(\sigma' \circ \sigma) = P(\sigma')P(\sigma)$, $P(\sigma) \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1})$.

Théorème :

Pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice $P(\sigma)A$ est obtenue par $L_{\sigma(i)} \leftarrow L_i$.

Pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice $AP(\sigma)$ est obtenue par $C_j \leftarrow C_{\sigma(j)}$.

Les deux opérations élémentaires ne modifient pas le rang d'une matrice.

2°) Matrice échelonnée

Déf : Une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée ssi elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & & & & & (*) & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_2 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_3 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \ddots \\ \ddots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ p_r \\ \\ 0 \end{matrix} \quad (0)$$

avec $p_1, \ldots, p_r \neq 0$.

Prop : Une telle matrice est de rang r .

3°) Algorithme du pivot de Gauss

Théorème :

Toute matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée par transvection sur les lignes en une matrice échelonnée de rang $r = \operatorname{rg} A$.

IV. Déterminant d'une matrice carrée

1°) Définition

Déf : On appelle déterminant d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ le scalaire :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \text{ encore noté } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]} .$$

Prop : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det {}^t A = \det A$ et donc $\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$

Théorème :

$\det I_n = 1$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \det AB = \det A . \det B$ et A est inversible ssi $\det A \neq 0$.

Cor : Deux matrices semblables ont même déterminant.

2°) Opérations élémentaires sur les déterminants

Théorème :

Les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ne modifient pas le déterminant.

Les opérations élémentaires $C_i \leftarrow \lambda C_i$ et $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplient par λ un déterminant.

La permutation des lignes ou des colonnes d'une matrice selon une permutation σ multiplie son déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.

3°) Développement d'un déterminant selon une rangée

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\Delta_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$: mineur d'indice (i,j) , $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \hat{a}_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$: cofacteur d'indice (i,j) .

Théorème :

$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$: développement de $\det A$ selon sa $j^{\text{ème}}$ colonne.

$\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$: développement de $\det A$ selon sa $i^{\text{ème}}$ ligne.

4°) Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème :

Si $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ avec A, C carrées alors $\det M = \det A \times \det D$.

Cor : $\begin{vmatrix} A_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{vmatrix} = \det A_1 \times \cdots \times \det A_n$ et $\begin{vmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & A_n \end{vmatrix} = \det A_1 \times \cdots \times \det A_n$

5°) Déterminant de Vandermonde

Théorème :

Soit $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$V_n(a_1,...,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

6°) Applications

a) formule de Cramer

Théorème :

Soit Σ un système à n équations et n inconnues :

$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$ d'équation matricielle $AX = B$.

Le système Σ est de Cramer ssi $\det A \neq 0$.

De plus, si tel est le cas, son unique solution est le n uplet $(x_1,...,x_n)$ avec

$$\forall 1 \le j \le n, x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

b) comatrice

Déf : On appelle comatrice de A la matrice des cofacteurs de A, on la note $\text{com}(A) = (A_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$.

Théorème :

$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \left({}^t \text{com}\, A\right) A = A \left({}^t \text{com}\, A\right) = \det(A) I_n$.

c) calcul de rang

Déf : On appelle matrice extraite de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ toute matrice formée en retirant des lignes et/ou de colonnes de A.

Prop : Le rang d'une matrice extraite est inférieur au rang de la matrice dont elle est extraite.

Déf : On appelle déterminant extrait de $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.

Le rang de A est l'ordre maximal des déterminants non nuls extraits de A.